۱- انتگرال های زیر را محاسبه کنید

(۱) $I=\int_0^2\int_0^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$, $\int_0^{4-x^2}\frac{e^{2y}}{4-y}\,dy \rightarrow$ مستقیماً قابل حل نیست

جای حدود را عوض می‌کنیم

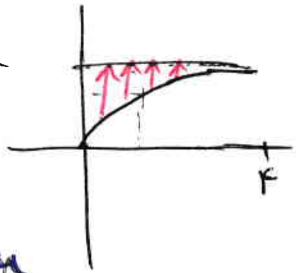
$y=0,\ \ y=4-x^2,\ \ x=0,\ x=2 \Rightarrow 0\le x\le\sqrt{4-y},\ \ 0\le y\le 4$

$$I=\int_0^4\int_0^{\sqrt{4-y}}\frac{xe^{2y}}{4-y}\,dx\,dy=\int_0^4\frac{e^{2y}}{4-y}\int_0^{\sqrt{4-y}}x\,dx\,dy$$

$$\int_0^{\sqrt{4-y}}x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{4-y}}=\frac12(\sqrt{4-y})^2-0=\frac{4-y}{2}$$

$$\Rightarrow I=\frac12\int_0^4\frac{e^{2y}}{4-y}(4-y)\,dy=\frac12\int_0^4 e^{2y}\,dy=\frac14e^{2y}\Big|_0^4=\frac14(e^8-e^0)=\frac14e^8-\frac14$$

(۲) $I=\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2\sin\pi y^3\,dy\,dx$



ابتدا ناحیه انتگرال گیری را رسم می‌کنیم.

$$I=\int_0^2\int_0^{y^2}\sin\pi y^3\,dx\,dy$$

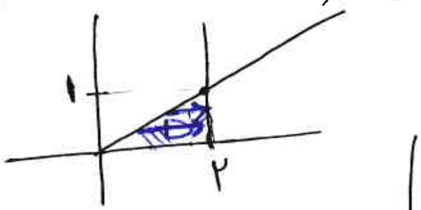
با تعویض جای حدود داریم:

$$=\int_0^2\sin\pi y^3\left(\int_0^{y^2}dx\right)dy \qquad \int_0^{y^2}dx=x\Big|_0^{y^2}=y^2-0=y^2$$

$$\Rightarrow I=\int_0^2\sin\pi y^3(y^2dy)=\frac{1}{3\pi}\int_0^2\sin\underbrace{\pi y^3}_{u}\,\underbrace{(3\pi y^2)dy}_{du}$$

$$=\frac{-1}{3\pi}\cos\pi y^3\Big|_0^2=-\frac{1}{3\pi}(\cos 8\pi-\cos 0)=0$$

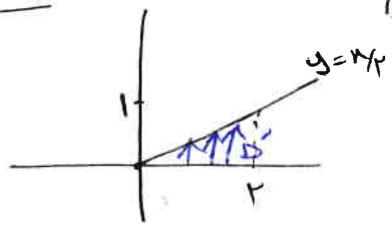
③ $I=\int_0^1\int_{2y}^{2} \cos(x^2)\,dx\,dy$



ابتدا ناحیه انتگرال گیری را رسم می کنیم.

ترتیب انتگرال گیری را عوض می کنیم

ناحیه D' به صورت روبرو می باشد



④ $I=\int_0^2\int_0^{\frac{x}{2}} \cos(x^2)\,dy\,dx$

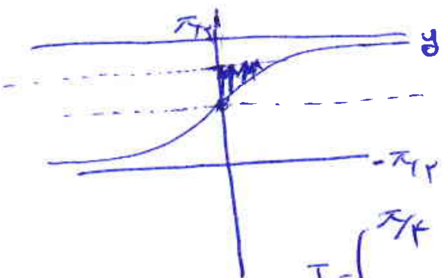
$=\int_0^2 \cos x^2 \left(\int_0^{x/2} dy\right) dx \,,\quad \int_0^{\frac{x}{2}} dy = y\Big|_0^{\frac{x}{2}} = \frac{x}{2}-0=\frac{x}{2}$

$x^2=u \Rightarrow 2x\,dx=du$

$I=\int_0^2 \cos(x^2)\cdot\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \cos(x^2)\,x\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^4 \cos u\,\frac{du}{2} = \frac{1}{4}\sin x^2\Big|_0^2 = \frac{\sin 4}{4}-\frac{\sin 0}{4} = \frac{\sin 4}{4}$

⑤ $I=\int_0^1\int_{\mathrm{Arctan}\,x}^{\pi/4} \ln(\cos y)\,dy\,dx$



$y=\tan^{-1}x \Rightarrow x=\tan y$

ابتدا ناحیه انتگرال گیری را رسم می کنیم

جای حدود را عوض می کنیم. داریم:

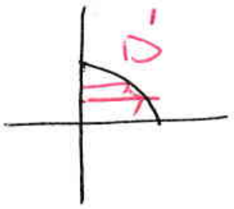
$I=\int_0^{\pi/4}\int_0^{\tan y} \ln(\cos y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/4} \ln\cos y\left(\int_0^{\tan y} dx\right)dy$

$\int_0^{\tan y} dx = x\Big|_0^{\tan y} = \tan y \,,\quad I=\int_0^{\pi/4} \ln(\cos y)\tan y\,dy \,,\quad u=\ln(\cos y) \Rightarrow du=\frac{-\sin y}{\cos y}dy$

$\int \ln(\cos y)\tan y\,dy = -\int u\,du = \frac{-u^2}{2} = -\left(\frac{\ln(\cos y)^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi/4} = -\frac{\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2}+\ln 1$

$=-\frac{1}{8}(\ln 2)^2$

(۶) $I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(1-y^2)^{3/2}\,dy\,dx$ $\qquad D\begin{cases}0\le y\le\sqrt{1-x^2}\\ 0\le x\le 1\end{cases}$



جای حدود را عوض می‌کنیم

$y=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow x=\sqrt{1-y^2}$

$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}(1-y^2)^{3/2}\,dx\,dy$

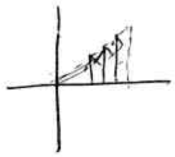
$=\int_0^1(1-y^2)^{3/2}\left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}}dx\right)dy$ و $\int_0^{\sqrt{1-y^2}}dx=x\Big|_0^{\sqrt{1-y^2}}=\sqrt{1-y^2}$

$\Rightarrow I=\int_0^1(1-y^2)^{3/2}\cdot(1-y^2)^{1/2}\,dy=\int_0^1(1-y^2)^2\,dy=\int_0^1 y^4+1-2y^2\,dy$

$=\frac{y^5}{5}+y-2\frac{y^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{5}+1-\frac{2}{3}-0=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$

۲_ انتگرال های زیر را با تغییر متغیر مناسب حل کنید.

(۱) $I=\int_0^3\int_0^{\sqrt{3}x}\frac{dy\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$



از تغییر متغیر قطبی استفاده می‌کنیم.

$x^2+y^2=r^2$ $\qquad y=0\Rightarrow\tan\theta=0\Rightarrow\theta=0$

$y=\sqrt{3}\,x\Rightarrow\frac{y}{x}=\sqrt{3},\ \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}=\tan^{-1}\sqrt{3}=\pi/3$

$x=3\Rightarrow r\cos\theta=3\Rightarrow r=\frac{3}{\cos\theta}$

$I=\int_0^{\pi/3}\int_0^{3/\cos\theta}\frac{r\,dr\,d\theta}{r}=\int_0^{\pi/3}\left(\int_0^{3/\cos\theta}dr\right)d\theta,\ \int_0^{3/\cos\theta}dr=r\Big|_0^{3/\cos\theta}=\frac{3}{\cos\theta}$

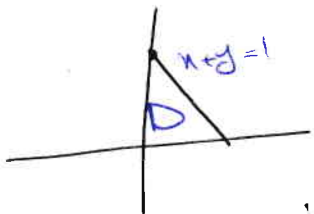
$I=\int_0^{\pi/3}\frac{3}{\cos\theta}\,d\theta=3\int_0^{\pi/3}\sec\theta\,d\theta=3\ln(\sec\theta+\tan\theta)\Big|_0^{\pi/3}$

$=3\ln(2+\sqrt{3})-3\ln(1)=3\ln(2+\sqrt{3})$

۲) $I=\iint_D \cos\frac{x-y}{x+y}\,dx\,dy$

D محصور به خطوط $x=0$ ، $y=0$ و $x+y=1$

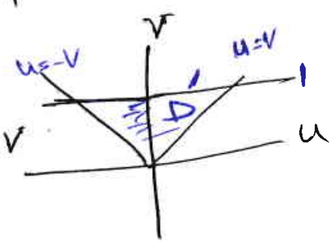
حل: ابتدا ناحیه انتگرال گیری را رسم می کنیم



حل این انتگرال با تغییر متغیر امکان پذیر است. قرار می دهیم: $x-y=u$, $x+y=v$ $\Leftarrow$

$x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{v-u}{2}$, $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}= \;$ $J=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \iint_D \cos\frac{x-y}{x+y}\,dx\,dy=\iint_{D'}\cos\frac{u}{v}\,|J|\,du\,dv$$



$x=0 \Rightarrow \frac{u+v}{2}=0 \Rightarrow u=-v$

$y=0 \Rightarrow v-u=0 \Rightarrow v=u$

$x+y=1 \Rightarrow y=1-x \Rightarrow \frac{v-u}{2}=1-\frac{u+v}{2} \Rightarrow v=1$

$$\Rightarrow I=\int_0^1\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv$$

$v\int_{-v}^{v}\frac{1}{v}\cos\frac{u}{v}\,du=v\sin\frac{u}{v}\Big|_{-v}^{v}=v\left(\sin\frac{v}{v}-\sin\frac{-v}{v}\right)=2v\sin 1$

$I=\int_0^1\frac{1}{2}\times 2v\sin 1\,dv=\sin 1\cdot\frac{v^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\sin 1$

۳) $I=\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy$

D محصور به خطوط $x=0$ ، $y=0$ و $x+y=1$

حل: با قرار دادن $\begin{cases}x-y=u\\ x+y=v\end{cases}$ روند محاسبه مشابه مثال قبل است.

۳- با استفاده از انتگرال دوگانه ثابت کنید $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

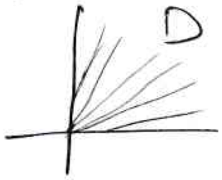
حل: چون e^{-x^2} تابعی زوج است ($\forall x\in D_f,\ f(-x)=f(x)$) می‌توان نوشت $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=2\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$

قرار می‌دهیم $I=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$ ، واضح است که $I=\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy \Leftarrow$

$$I^2=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx\cdot\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dy\,dx$$

با استفاده از تغییر متغیر قطبی

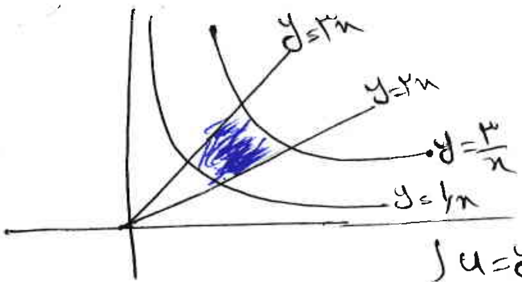
$$I^2=\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} re^{-r^2}d\theta\, dr$$



$$\int_0^{\pi/2}d\theta=\theta\Big|_0^{\pi/2}=\pi/2\ ,\ -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}-2re^{-r^2}dr=-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{\infty}=\frac{-1}{2}e^{-\infty}+\frac{1}{2}e^{0}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I^2=\frac{1}{2}\times\pi/2=\pi/4\Rightarrow I=\sqrt{\pi/4}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=2I=2\sqrt{\pi/4}=\sqrt{\pi}\ .$$

۴- مطلوب است محاسبه مساحت محدود به خم های $y=1/x$ ، $y=\frac{3}{x}$ و خطوط $y=2x$ و $y=3x$ در ربع اول صفحه.



مساحت $=\iint_D dA=\iint_D dy\,dx$

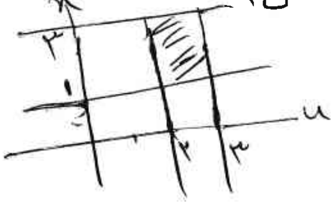
با تعریف متغیرهای $\begin{cases}u=y/x\\ v=xy\end{cases}$ داریم:

$2\le\frac{y}{x}\le 3\Rightarrow 2\le u\le 3$

$1\le xy\le 3\Rightarrow 1\le v\le 3$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}\ ,\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}&\frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{-y}{x^2}&y\\ \frac{1}{x}&x\end{vmatrix}$$

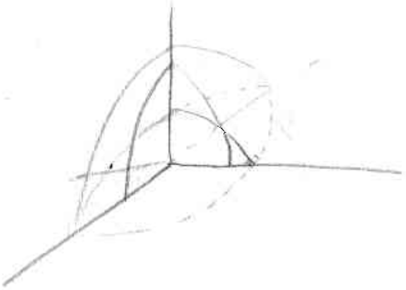
$$=\frac{-2y}{x}\Rightarrow J=\frac{-x}{2y}=\frac{-1}{2u}\ ,\ S=\int_1^3\int_2^3|J|\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_1^3\left(\int_2^3\frac{du}{u}\right)dv=$$



$$\frac{1}{2}\int_1^3\left(\ln u\Big|_2^3\right)dv=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 2)\int_1^3 dv=\frac{(3-1)}{2}(\ln 3-\ln 2)$$

۵. حجم ناحیه جدا شده از کره جامد $x^2+y^2+z^2\le a^2$ به وسیله استوانه مستدیر $x^2+y^2=ax\ (a>0)$ را بیابید.

حل: استوانه $x^2+y^2=ax$ صفحه xy را در دایره‌ای به مرکز $(\frac{a}{2},0)$ و شعاع $\frac{a}{2}$ قطع می‌کند



زیرا $x^2+y^2=ax \Rightarrow (x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$.

$$V=4\iint_D z\,dx\,dy$$ (D ناحیه مستدیر واقع در ربع اول)

$$V=4\iint \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

از تغییر متغیر قطبی استفاده می‌کنیم.

$$x^2+y^2=ax \Rightarrow r^2=ar\cos\theta \Rightarrow$$
$$r(r-a\cos\theta)=0 \Rightarrow r=0,\ r=a\cos\theta$$

$$V=4\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{\underbrace{a^2-r^2}_{u}}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\Big|_0^{a\cos\theta}\right)d\theta=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\pi/2}1-\sin^3\theta\,d\theta$$

$$=\frac{4}{3}a^3\left(\int_0^{\pi/2}d\theta-\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,d\theta\right)=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^{\pi/2}\sin\theta(1-\cos^2\theta)d\theta\right)$$

$$=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta+\int_0^{\pi/2}\underbrace{\cos^2\theta}_{u^2}(\underbrace{\sin\theta\,d\theta}_{-du})\right)$$

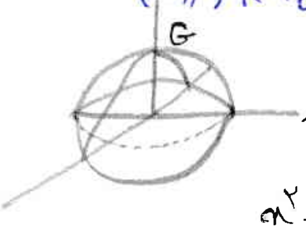
$$=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\underbrace{\frac{1}{3}\cos^3\theta+\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}}\right)=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

تمرین مشابه ۱: حجم محدود به کره $x^2+y^2+z^2=4$ و سهمی‌گون $x^2+y^2=4(1-z)$ را بیابید.

۲. حجم محدود به سهمی‌گون های $x^2+y^2-z=0$ و $x^2+y^2+2z=1$ را بیابید.

انتگرال سه‌گانه

۱- مطلوب است محاسبه $\iiint_G z\,dz\,dy\,dx$ که G ناحیه محدود به نیمکره $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geq 0)$ و صفحه $z=0$ می‌باشد.



حل: ابتدا ناحیه مورد نظر را رسم می‌کنیم. می‌توان از تغییر متغیر کروی استفاده کرد.

$x^2+y^2+z^2=a^2 \Rightarrow \rho^2=a^2 \Rightarrow 0\leq\rho\leq a$, $z\geq 0$, و صفحه $z=0$

$\Rightarrow \quad 0\leq\varphi\leq\pi/2 , \quad 0\leq\theta\leq 2\pi$

$$\iiint_G z\,dz\,dy\,dx=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a}(\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=$$

$$\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)}_{\theta\big|_0^{2\pi}}\underbrace{\left(\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\right)}_{=\frac{\sin^2\varphi}{2}\big|_0^{\pi/2}}\underbrace{\left(\int_0^{a}\rho^3\,d\rho\right)}_{\frac{\rho^4}{4}\big|_0^{a}}=\frac{a^4}{4}\times\underbrace{\left(\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}}{2}-\frac{\sin^2 0}{2}\right)}_{1/2}\times 2\pi=\frac{a^4}{4}\cdot\pi$$

۲) $I=\iiint_G e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\,dz\,dy\,dx$ G ناحیه بین دو کره $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=4$

حل: از تغییر متغیر کروی استفاده می‌کنیم.

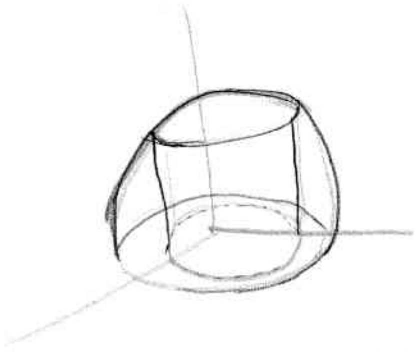
$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{2}e^{\sqrt{(\rho^2)^3}}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_1^{2}e^{\rho^3}\rho^2\,d\rho\right)$$

$$\int_1^2 e^{\rho^3}\rho^2\,d\rho=\frac{1}{3}e^{\rho^3}d\rho=\frac{1}{3}(e^{8}-e) , \quad \int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi=-\cos\varphi\Big|_0^{\pi}=-\cos\pi+\cos 0=2$$

$$\int_0^{2\pi}d\theta=\theta\Big|_0^{2\pi}=2\pi \Rightarrow I=2\pi\times 2\times\frac{1}{3}(e^{8}-e)=\frac{4\pi}{3}(e^{8}-e)$$

۳) $I=\iiint_G \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz$

$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ;\ x^2+y^2\geq 1 \quad x^2+y^2+z^2\leq 2 ,\ z\geq 0\}$



از تغییر متغیر استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$G\left|\begin{array}{l} 0\leq\theta\leq 2\pi \\ 1\leq r\leq\sqrt{2} \\ 0\leq z\leq\sqrt{2-r^2}\end{array}\right.$$

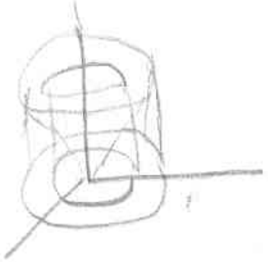
$$I=\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-r^2}}\frac{z}{r}\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{\sqrt{2}}dr\int_0^{\sqrt{2-r^2}}z\,dz$$

$$=2\pi\cdot\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}(2-r^2)\,dr=\frac{2\pi}{2}\left(2r-\frac{r^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\pi\left(2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-2+\frac{1}{3}\right)$$

۲- مطلوب است حجم هر یک از نواحی زیر

الف) حجم بین استوانه‌های $x^2+y^2=1$ ، $x^2+y^2=4$ محدود شده توسط مخروط $z^2=x^2+y^2$

$$z^2=r^2\Rightarrow z=\pm r\qquad V=\iiint_G 1\cdot dz\,dy\,dx=\int_0^{2\pi}\int_1^{2}\int_{-r}^{r}r\,dz\,dr\,d\theta$$



$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{2}r\,dr\underbrace{\int_{-r}^{r}dz}_{z|_{-r}^{r}=2r}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{2}r(2r)\,dr=2\pi\cdot\frac{2}{3}r^3\Big|_1^2$$

$$=\frac{14}{3}\cdot 2\pi=\frac{28\pi}{3}$$

ب) ناحیه درون استوانه $x^2+y^2=2x$ محدود شده توسط کره $x^2+y^2+z^2=4$ در نیم فضای $z\geq 0$

حل) $x^2+y^2=2x\Rightarrow(x-1)^2+y^2=1\Rightarrow r^2=2r\cos\theta\Rightarrow r=0$ یا $r=2\cos\theta$

$$V=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\sqrt{4-r^2}}r\,dz\,dr\,d\theta\ ,\quad\int_0^{\sqrt{4-r^2}}dz=z\Big|_0^{\sqrt{4-r^2}}=\sqrt{4-r^2}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{2\cos\theta}-2r\sqrt{4-r^2}\,dr=-\frac{1}{2}\frac{(4-r^2)^{3/2}}{3/2}=-\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2}\Big|_0^{2\cos\theta}=-\frac{1}{3}(4-4\cos^2\theta)^{3/2}+\frac{1}{3}(4)^{3/2}$$

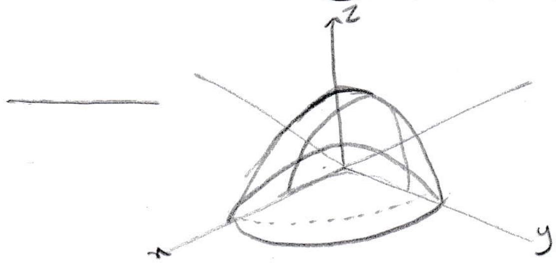
$$=-\frac{1}{3}\left((4\sin^2\theta)^{3/2}-(4)^{3/2}\right)=-\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin^3\theta-1)\,d\theta\ \cdots$$

۸

۱۵ ۸

۳- مختصات مرکز ثقل نیمکره توپر G به شعاع a را بیابید.

حل: فرض کنید $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ مختصات مرکز ثقل G باشد که G از بالا به کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ و از پایین به صفحه $z=0$ محدود شده است.



بنا به تقارن و با توجه به صفحه $z=0$ داریم $\bar{x}=\bar{y}=0$ کافی است $\bar{z}$ را محاسبه کنیم

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint_G z\,dx\,dy\,dz$$

V حجم نیمکره است $V=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)=\frac{2}{3}\pi a^3$

با استفاده از تغییر متغیر استوانه‌ای داریم:

$$\iiint_G z\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} J\,z\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a}dr\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r\,z\,dz\ ,\quad \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} z\,dz=\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$=\frac{1}{2}(a^2-r^2)\ ,\quad \int_0^{a} r(a^2-r^2)\,dr=\frac{1}{2}a^2r^2-\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{a}$$

$$=\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^4=\frac{1}{4}a^4\ ,\quad \int_0^{2\pi}d\theta=\theta\Big|_0^{2\pi}=2\pi$$

$$\Rightarrow \bar{z}=\frac{1}{\frac{2}{3}\pi a^3}\left(2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}a^4\right)=\frac{\frac{1}{4}\pi a^4}{\frac{2}{3}\pi a^3}=\frac{3}{8}a$$